Eksempel på opgaveformulering fra SRP med matematik og fysik

Emne: Matematikkens grundlagsproblemer

Opgaveformulering:

Præsentér Russels paradoks i dets filosofiske kontekst. Inddrag Immanuel Kant og Gottlob Frege.

Forklar hvad det vil sige at matematik er en aksiomatisk-deduktiv videnskab.

Gør rede for Peanos aksiomer til karakterisering af de naturlige tal. Vis hvordan de naturlige tal kan konstrueres vha. Zermelo-Fraenkels aksiomer (på en sådan måde at Peanos aksiomer er opfyldt).

Bevis mindst to selvvalgte matematisk påstande vha. fuldstændig induktion, f.eks. formlen $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = n^2 \cdot (n + 1)^2/4$ omhandlende sum af kubiktal.

Diskuter hvad Russells paradoks har betydet for matematikkens grundlag.

Eksempel på delafsnit fra SRP med matematik

Første citat

”Kant etablerer i sin erkendelsesteori matematikken som formel videnskab. Dette lykkes ved at antage, at matematiske domme er syntetiske a priori, hvilket vil sige, at de kan fortælle noget nyt samtidig med, at de kan verificeres uafhængigt af erfaringen. Frege skaber et logisk begrebssprog for at rydde op i matematikken og undgå fejlslutninger. I forlængelse heraf fremsætter han sin taldefinition, hvor det er muligt at danne mængder ud af alting. Denne naive mængdelære leder til Russels paradoks, hvilket peger på alvorlige problemer i matematikkens grundlag”.

Kommentar: Eleven beskæftiger sig med matematikkens aksiomatiske grundlag. Eleven har valgt at inddrage filosofferne Kant og Frege i sin undersøgelse.

Andet citat

”De naturlige tal er hermed blevet karakteriseret og konstrueret på et sikkert grundlag. Der kan herefter udledes teoremer på grundlag af aksiomerne. Dette demonstrerer jeg i det følgende ved selv at bevise en matematisk påstand ved hjælp af fuldstændig induktion. Konkret drejer det sig om påstanden $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = n^2 \cdot (n + 1)^2/4$”.

Kommentar: Eleven beviser en velkendt formel om sum af kubiktal vha. matematisk induktion (selve bevisførelsen er ikke med i citatet).

Tredje citat

”De naturlige tals egenskaber er blevet demonstreret af Peanos aksiomer. Derudover er de naturlige tal blevet konstrueret vha. ZFC-aksiomerne, hvilket danner grundlag for at kunne konstruere resten af matematikken via den aksiomatisk-deduktive metode. Konstruktionen tillader os at bevise påstande om naturlige tal ved induktion, og det har vi ses et eksempel på”.

Kommentar: Eleven knytter her en forbindelse mellem det, som hans SRP overordnet handler om (matematikkens aksiomatiske grundlag), og en konkret anvendelse (bevis ved induktion).

Fjerde citat

”Der er to mulige holdninger til Russels paradoks og dets betydning for matematikkens grundlag. Enten kan man vælge at afvise, at paradokset er vigtigt, da det ikke påvirker den anvendte matematik, eller også kan man hævde, at der ikke findes noget vigtigere end grundlaget, for uden det vil matematikken brase sammen. ZFC-aksiomerne er opstået som svar på Russells paradoks, men ifølge Gödel er heller ikke de beviseligt konsistente. Derfor kan det i sidste ende blive et subjektivt valg at beslutte, hvor sikkert noget skal være, før at man kan acceptere det”.

Kommentar: Eleven antyder her de mulige standpunkter, man kan indtage i spørgsmålet om matematikkens aksiomatisering. Afsnittet fungerer fint som afrundende sammenfatning.